

Эта статья поставлена в интернете 02.03.2026 г. и не была отправлена ни в один журнал в связи с **негласным запретом для сторожей публиковаться в журналах ВАК России**. Подробнее – в конце статьи «Структура общего решения уравнения Эрмита и решение при отрицательных целых
n»
https://archive.org/details/20260122_20260122_1442

УДК 517.923, 517.926.4

Структура общего решения уравнения Лежандра, его дробные производные и многочлены

Зайков С.Ю.

МАУ ДО «Спортивная школа зимних видов спорта Города Томска»

zaykov_tomsk@mail.ru

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение Лежандра, структура его общего решения при $\mu \neq 0$, содержащиеся в ней многочлены и дробные производные. Структурой общего решения считается линейная комбинация восьми частных решений, содержащих дробные производные. Найдены решения этих уравнений для случаев, когда показатели вышеуказанных дробных производных являются неотрицательными целыми числами.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, рекуррентные соотношения, дробные производные, уравнение Лежандра, присоединенные многочлены Лежандра, формула Родрига, пробелы в справочниках.

1. Введение

Многочлены Лежандра впервые были описаны в 1783 году в одной из работ французского математика Адриена Мари Лежандра, и были названы его именем. Они являются частным решением уравнения Лежандра, см. [1, с. 126]:

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + [\nu(\nu + 1) - \mu^2(1 - x^2)^{-1}]y(x) = 0, \quad (1)$$

при $\mu = 0$, т.е.

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \nu(\nu + 1)y(x) = 0. \quad (2)$$

и при целых неотрицательных ν . Поскольку подстановка

$$\nu \Rightarrow -\nu - 1, \quad (3)$$

оставляет уравнение (2) неизменным, то частным решением уравнения (2) при отрицательных целых ν также являются многочлены Лежандра. Многочлены Лежандра определяются формулой, см. [2, с. 116]:

$$P_\nu(x) = \frac{1}{\nu! 2^\nu} ((x^2 - 1)^\nu)^{(\nu)}, \nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq 0, \quad (4)$$

содержащую дробную производную, см. [3], и соответствуют рекуррентному соотношению, см. [2, с. 121]:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad (5)$$

при начальных условиях, см. [2, с. 116]:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x. \quad (6)$$

Многочлены Лагранжа можно представить формулой, см. [2, с. 120],

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}, s = \left[\frac{n}{2} \right], \quad (7)$$

где $\left[\frac{n}{2} \right]$ означает целую часть числа $\frac{n}{2}$.

Для уравнения (1) приведены присоединенные многочлены Лагранжа. Они получаются следующим образом. Сперва подстановкой, см. [1, с. 126], [4, с. 238]:

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} t(x), \quad (8)$$

получаем из уравнения (1) уравнение

$$(1-x^2)t''(x) - 2(\mu+1)xt'(x) + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)t(x) = 0, \quad (9)$$

Тогда присоединенные многочлены Лагранжа, являющиеся частными решениями уравнения (1), определяются следующим образом, см. [4, с. 238], [5, с. 679]:

$$P_\nu^\mu(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} (P_\nu)^{(\mu)}, \mu \in Z, \mu \geq 0, \quad (10)$$

а также считается, см. [5, с. 679], что

$$P_\nu^\mu(x) \equiv 0, \mu > \nu. \quad (11)$$

Приведенное выше представление решений уравнения Лагранжа в элементарных функциях обладает целым рядом явных недостатков из-за его неполноты, и соответствовало современному состоянию теории дифференциальных уравнений по 2025 год.

Но вследствие появления в январе 2026 года в [6], [7], [8] концепции структуры общего решения линейных дифференциальных уравнений, отличающейся от традиционной, приведенное выше представление решений уравнения Лагранжа в элементарных функциях с 2026 года является неполным и устаревшим.

2. Недостатки прежнего представления решений уравнения Лагранжа в элементарных функциях

Структурой общего решения любых обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка традиционно считается линейная комбинация двух линейно независимых частных решений уравнения, т.е.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (12)$$

Предложенная в [6], [7], [8] структура общего решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений не обладает такой универсальностью, как традиционная, и имеется только у некоторых уравнений. Но она есть у ряда известных уравнений. В том числе у уравнения Лагранжа.

Эта структура является линейной комбинацией частных решений уравнения, которые обязательно содержат дробные производные

$$y_k(x) = C_k f_k(x) (g_k(x))^{(n_k)}. \quad (13)$$

Эти частные решения образуют пары, у которых показатели дробных производных имеют противоположные знаки. Это свойство образования пар было использовано, в частности, в [6], [7], [8], для нахождения решений дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов при отрицательных целых n . Метод нахождения пары для известного частного решения указан и основан на теореме 1 в [6].

Таких пар может быть одна, см. [6], две, см. [7], или четыре, см. [8], т.е. обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка может иметь два, четыре или восемь частных решений вида (13).

Вследствие (12) это означает, что в случае, когда у уравнения есть две пары частных решений, то частные решения с отрицательными показателями дробных производных, т.е. многократные интегралы, являются линейной комбинацией частных решений с положительными показателями дробных производных. Т.е. получается парадокс многократного интегрирования, когда многократный интеграл можно получить многократным дифференцированием, см. [7].

В случае, когда у уравнения есть четыре пары частных решений, то можно найти некоторые дробные производные с нецелыми показателями, включая иррациональные, например, с показателем π , см. [8], в виде, как минимум, линейной комбинации известных функций.

Из вида уравнения Лагранжа (1) следует, что оно должно иметь четыре пары частных решений вида (13), следовательно, можно использовать его как для парадокса многократного интегрирования, так и для получения дробных производных с нецелыми показателями.

Дробные производные не определяются однозначно. Поэтому значения этих дробных производных должны соответствовать уравнению, т.е. считается, что дробные производные должны принимать такие значения, чтобы в подстановке этих значений в (13), (13) было частным решением уравнения.

Важным моментом предложенной в [6], [7], [8] структуры является то, что дробные производные в ней, включая формулы Родрига, рассматриваются именно как дробные производные, а не просто принимающие значения многократных производных при неотрицательных целых показателях.

В частности, это означает, что для дробных производных выполняется

$$(f^{(n)}(x))^{(m)} = f^{(n+m)}(x), \quad (14)$$

для любых вещественных n, m , а не только для неотрицательных целых n, m .

На первый взгляд, в применении дробных производных нет никакой пользы. Ведь все равно неясно, чему они равны при нецелых показателях. Поэтому рассмотрим пример, связанный с присоединенными многочленами Лагранжа.

Возьмем (4) и (10), но будем рассматривать указанные в них производные как дробные, а не как в [4, с. 238], [5, с. 679], показатели которых ν , обязательно должны быть неотрицательными целыми числами. Тогда, объединив (4) и (10), с учетом (14) получим

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\nu! 2^\nu} (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} (x^2 - 1)^\nu (\mu + \nu). \quad (15)$$

Пусть

$$\mu = \pi, \nu = 1 - \pi, \quad (16)$$

тогда

$$P_{1-\pi}^\pi(x) = \frac{1}{(1-\pi)! 2^{1-\pi}} (x^2 - 1)^{\frac{\pi}{2}} ((x^2 - 1)^{1-\pi})^{(1)}. \quad (17)$$

Получим из (17)

$$P_{1-\pi}^\pi(x) = \frac{1}{(-\pi)!} x \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \right)^{-\frac{\pi}{2}}, \quad (18)$$

затем упростим (18), убрав константу

$$y(x) = x(x^2 - 1)^{-\frac{\pi}{2}}. \quad (19)$$

Сделав подстановку (16) в (1), получим

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + [(\pi - 1)(\pi - 2) - \pi^2(1 - x^2)^{-1}]y(x) = 0, \quad (20)$$

Подставив (19) в (20), получим, что (19) является частным решением уравнения (20).

А теперь посмотрим, что получилось. Из [4, с. 238], [5, с. 679] видно, что получить $P_{1-\pi}^\pi(x)$ невозможно по целому ряду причин. Во-первых, из (4) следует, что невозможно получить $P_{1-\pi}(x)$, т.к. $1 - \pi < 0$, т.е. надо проинтегрировать иррациональное число раз, во-вторых, из (10) следует, что получить $P_{1-\pi}^\pi(x)$ невозможно из $P_{1-\pi}(x)$, т.к. для этого нужно продифференцировать иррациональное число раз, в-третьих, т.к. $\pi > 1 - \pi$, то в соответствие (11) $P_{1-\pi}^\pi(x)$ должно быть равно нулю.

Но (17) и (18) найдены и они верны, поскольку являются решением уравнения (20).

При этом не выводились никакие новые формулы. Использовались только те, которые были известны раньше. Объединение (4) и (10) в (15) возможно было и раньше, при неотрицательных целых μ, ν , но не было сделано в [4], [5] лишь по одной причине – чтобы показать взаимосвязь между обычными многочленами Лежандра и присоединенными. Но (15) не является новым, оно приведено в [9, с. 162]. Хотя и в несколько странном виде, производная взята не от того сомножителя. То же самое относится к (14) – это свойство производных при неотрицательных целых n, m .

Следовательно, $P_{1-\pi}^\pi(x)$ был получен всего лишь в результате изменения концепции – использовании дробных производных, чей показатель может принимать любые вещественные значения, а не только быть неотрицательным целым числом, как у обычных производных. Аналогично, можно найти любые $P_\nu^\mu(x)$ при условии, что $(\mu + \nu)$ является неотрицательным целым числом.

То, что в [4], [5] рассматриваются только неотрицательные целые μ, ν , является недостатком прежнего представления.

Частным решением уравнения (1) вида (13) является (15), т.е.

$$y_1(x) = C_1(x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^\nu)^{(\mu+\nu)}, \quad (21)$$

и уравнение (1) остается неизменным при подстановке (3). Но (21) не остается неизменным при подстановке (3), а получаем

$$y_2(x) = C_2(x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^{-v-1})^{(\mu-v-1)}. \quad (22)$$

Поскольку при подстановке

$$\mu \Rightarrow -\mu, \quad (23)$$

уравнение (1) остается неизменным то подстановкой (23) получаем из (21), (22)

$$y_3(x) = C_3(x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^v)^{(v-\mu)}, \quad (24)$$

$$y_4(x) = C_4(x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^{-v-1})^{(-\mu-v-1)}. \quad (25)$$

Тогда (21), (22), (24), (25) являются частными решениями уравнения (1) вида (13).

(21) и (25) образуют пару с противоположными знаками у показателей производных. Она дает решение уравнения (1) при условии что $(\mu + v)$ является целым числом.

(22) и (24) также образуют пару с противоположными знаками у показателей производных. Она дает решение уравнения (1) при условии что $(\mu - v)$ является целым числом.

Поскольку подстановки (3) и (23) давно известны, (22), (24), (25) можно было вывести в рамках прежней концепции. Но не вывели. Что также является недостатком прежней концепции.

Рассмотрим для уравнения (1) случай

$$\mu = 2, v = 1, \quad (26)$$

т.е. когда уравнение (1) имеет вид

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + [2 - 4(1 - x^2)^{-1}]y(x) = 0. \quad (27)$$

Очевидно, что (21) при условии (26) равно нулю. Подставив (26) в (22) и (24), получим

$$y_2(x) = C_2(x^2 - 1)^{-1}, \quad (28)$$

$$y_3(x) = C_3(x^2 - 1)^{-1}(x^2 - 1)^{(-1)}. \quad (29)$$

Подставив (28) в (27), получим, что (28) есть частное решение уравнения (27). Поскольку в (29) показатель у дробной производной равен (-1) , то она уходит в интегрирование, и (29) имеет вид

$$y_3(x) = C_3(x^2 - 1)^{-1} \int (x^2 - 1) dx. \quad (30)$$

Тогда

$$y_3(x) = C_3 \left(x - \frac{2x}{x^2 - 1} \right). \quad (31)$$

Поскольку неопределенный интеграл определяется с точностью до константы, то обычно необходимо подбирать константу так, чтобы получилось решение уравнения. Но в данном

случае в этом нет необходимости, т.к. константа при неопределенном интеграле в (30) сводится к (29), которое является решением уравнения (27).

Подставив (31) в (27), получим, что (31) является частным решением уравнения (27). Получили общее решение уравнения (27):

$$y(x) = C_1(x^2 - 1)^{-1} + C_2 \left(x - \frac{2x}{x^2 - 1} \right). \quad (32)$$

По прежней концепции, нельзя получить частное решение уравнения Лежандра при условии (26) $P_1^2(x)$, т.к. $\mu > \nu$, что противоречит (11), но мы получили общее решение. Что указывает на недостаток прежней концепции.

Также недостатком прежней концепции является тот факт, что из нее можно вывести только четыре из восьми частных решений уравнения Лежандра вида (13), остальные четыре из нее не выводятся.

3. Структура общего решения уравнения Лежандра

Найдем структуру общего решения уравнения Лежандра в виде линейной комбинации восьми частных решений, содержащих дробные производные, вида (13). Четыре из них уже найдены, это (21), (22), (24), (25). Если эти частные решения можно вывести из известных уравнений и подстановок, таких, как (3), (4), (10), (23), то остальные четыре частных решения из них не выводятся. Они отсутствуют как в известных научных источниках, например, в [1], [2], [4], [9], [10], [11], [12], [13], [14], так и в современных статьях, например, [15], [16], [17], [18], [19].

Сделаем в (1) подстановку

$$z(x) = (x + 1)^{\frac{1}{2}\mu} (x - 1)^{-\frac{1}{2}\mu} y(x), \quad (33)$$

получим

$$(x^2 - 1)z''(x) + 2(x + \mu)z'(x) - \nu(\nu + 1)z(x) = 0. \quad (34)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение для классических ортогональных многочленов, см. [2, с. 50]:

$$B(x)y''(x) + (A(x) + B'(x))y'(x) - n(p_1 + (n + 1)q_2)y(x) = 0. \quad (35)$$

Оно соответствует уравнению Пирсона, см. [2, с. 44,50]

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (36)$$

и формуле Родрига, см. [2, с. 54]:

$$y(x) = \frac{1}{h(x)} (h(x)B^n(x))^{(n)}. \quad (37)$$

Уравнение (34) соответствует уравнению (35) при

$$B(x) = x^2 - 1, A(x) = 2\mu \Rightarrow p_0 = 2\mu, p_1 = 0, q_0 = -1, q_1 = 0, q_2 = 1, n = \nu. \quad (38)$$

Тогда

$$h(x) = (x + 1)^{-\mu}(x - 1)^{\mu}, \quad (39)$$

и уравнение (34) соответствует формуле Родрига

$$z(x) = (x + 1)^{\mu}(x - 1)^{-\mu}((x + 1)^{\nu-\mu}(x - 1)^{\nu+\mu})^{(\nu)}. \quad (40)$$

Тогда из (33) и (40) получаем, что уравнение Лагранжа (1) имеет частное решение с дробной производной вида (13):

$$y_5(x) = C_5(x + 1)^{\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{-\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{\nu-\mu}(x - 1)^{\nu+\mu})^{(\nu)}. \quad (41)$$

Сделав подстановку (3), получим другое частное решение

$$y_6(x) = C_6(x + 1)^{\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{-\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{-\mu-\nu-1}(x - 1)^{\mu-\nu-1})^{(-\nu-1)}. \quad (42)$$

Сделав подстановку (23) в (41) и (42), получим еще два частных решения вида (13):

$$y_7(x) = C_7(x + 1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{\nu+\mu}(x - 1)^{\nu-\mu})^{(\nu)}, \quad (43)$$

$$y_8(x) = C_8(x + 1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{\mu-\nu-1}(x - 1)^{-\mu-\nu-1})^{(-\nu-1)}, \quad (44)$$

Следовательно, из (21), (22), (24), (25), (41), (42), (43), (44) получаем, что структурой решения уравнения Лежандра является

$$\begin{aligned} y(x) = & C_1(x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^{\nu})^{(\mu+\nu)} + C_2(x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^{-\nu-1})^{(\mu-\nu-1)} + \\ & + C_3(x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^{\nu})^{(\nu-\mu)} + C_4(x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}}((x^2 - 1)^{-\nu-1})^{(-\mu-\nu-1)} + \\ & + C_5(x + 1)^{\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{-\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{\nu-\mu}(x - 1)^{\nu+\mu})^{(\nu)} + \\ & + C_6(x + 1)^{\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{-\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{-\mu-\nu-1}(x - 1)^{\mu-\nu-1})^{(-\nu-1)} + \\ & + C_7(x + 1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{\nu+\mu}(x - 1)^{\nu-\mu})^{(\nu)} + \\ & + C_8(x + 1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x - 1)^{\frac{1}{2}\mu}((x + 1)^{\mu-\nu-1}(x - 1)^{-\mu-\nu-1})^{(-\nu-1)}. \end{aligned} \quad (45)$$

4. Частные решения уравнения Лежандра, полученные из его дробных производных

Частные решения уравнения Лежандра можно получить из его структуры общего решения тем же способом, каким получают многочлены Лежандра: продифференцировать все дробные производные для натуральных показателей.

4.1. Частные решения уравнения Лежандра при неотрицательных целых ν

Есть два частных решения уравнения Лежандра при неотрицательных целых ν , (41) и (43). Сперва рассмотрим (41).

Определение 1. Назовем многочлены, соответствующие формуле Родрига (40), многочленами $L1(x)$ первого рода уравнения Лагранжа.

Найдем свойства многочленов первого рода. Поскольку они соответствуют формуле Родрига (40), то найдем из (40) значения первых многочленов:

$$L1_0^\mu(x) = 1, L1_1^\mu(x) = 2x + 2\mu. \quad (46)$$

Поскольку для (40) определены коэффициенты (38), найдем рекуррентные соотношения для многочленов первого рода по теореме 3 из [6]:

$$L1_{v+2}^\mu(x) - (4v + 6)xL1_{v+1}^\mu(x) + (4v^2 - 4\mu^2 + 8v + 4)L1_v^\mu(x) = 0. \quad (47)$$

Пусть

$$f(x) = (x + 1)^{v-\mu}, g(x) = (x - 1)^{v+\mu}, \quad (48)$$

тогда по формуле Лейбница дифференцирования произведения

$$(f(x)g(x))^{(v)} = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} f^{(k)}(x) g^{(v-k)}(x), \quad (49)$$

получим

$$((x + 1)^{v-\mu} (x - 1)^{v+\mu})^{(v)} = \sum_{k=0}^v \binom{v+\mu}{v-k} \binom{v-\mu}{k} v! (x + 1)^{v-\mu-k} (x - 1)^{\mu+k}. \quad (50)$$

Тогда из (40) и (50) получим

$$L1_v^\mu(x) = \sum_{k=0}^v \binom{v+\mu}{v-k} \binom{v-\mu}{k} v! (x + 1)^{v-k} (x - 1)^k. \quad (51)$$

Следовательно, из (33) и (51) получили, что частным решением (41) уравнения Лежандра при неотрицательных целых v будет

$$y_5(x) = (x + 1)^{-\frac{1}{2}\mu} (x - 1)^{\frac{1}{2}\mu} \sum_{k=0}^v \binom{v+\mu}{v-k} \binom{v-\mu}{k} v! (x + 1)^{v-k} (x - 1)^k. \quad (52)$$

Теперь рассмотрим (43).

Определение 2. Назовем многочлены, соответствующие формуле Родрига

$$L2_v^\mu(x) = (x + 1)^{-\mu} (x - 1)^\mu ((x + 1)^{v+\mu} (x - 1)^{v-\mu})^{(v)}, \quad (53)$$

многочленами $L2(x)$ второго рода уравнения Лагранжа.

Очевидно, что (53) получена из (40) подстановкой (23), следовательно

$$L2_v^\mu(x) = L1_v^{-\mu}(x). \quad (54)$$

Поскольку (43) получено из (41) также подстановкой (23), то многочлены второго рода входят в частное решение (43). Найдем свойства многочленов второго рода путем подстановки (23) в свойства многочленов первого рода (46), (47), (51). Получим

$$L2_0^\mu(x) = 1, L2_1^\mu(x) = 2x - 2\mu, \quad (55)$$

$$L2_{v+2}^{\mu}(x) - (4v + 6)xL2_{v+1}^{\mu}(x) + (4v^2 - 4\mu^2 + 8v + 4)L2_v^{\mu}(x) = 0, \quad (56)$$

$$L2_v^{\mu}(x) = \sum_{k=0}^v \binom{v-\mu}{v-k} \binom{v+\mu}{k} v! (x+1)^{v-k} (x-1)^k. \quad (57)$$

Подстановкой (23) в (52) получим, что частным решением (43) уравнения Лежандра при неотрицательных целых v будет

$$y_7(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}\mu} (x-1)^{-\frac{1}{2}\mu} \sum_{k=0}^v \binom{v-\mu}{v-k} \binom{v+\mu}{k} v! (x+1)^{v-k} (x-1)^k. \quad (58)$$

Следовательно, общим решением уравнения Лежандра при неотрицательных целых v будет линейная комбинация частных решений (52) и (57).

4.2. Частные решения уравнения Лежандра при отрицательных целых v

Есть два частных решения уравнения Лежандра при отрицательных целых v , (42) и (44).

Сперва рассмотрим (42). Многочлены, содержащиеся в (42), соответствуют формуле Родрига

$$L1_{-v-1}^{\mu}(x) = (x+1)^{\mu} (x-1)^{-\mu} ((x+1)^{-\mu-v-1} (x-1)^{\mu-v-1})^{(-v-1)}. \quad (59)$$

Следовательно,

$$y_6(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}\mu} (x-1)^{\frac{1}{2}\mu} L1_{-v-1}^{\mu}(x). \quad (60)$$

Поскольку (42) получено из (41) подстановкой (3), то подстановкой (3) в (52) получим, что частным решением (42) уравнения Лежандра при отрицательных целых v будет

$$y_6(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}\mu} (x-1)^{\frac{1}{2}\mu} * \sum_{k=0}^{-v-1} \binom{\mu-v-1}{-v-k-1} \binom{-v-\mu-1}{k} (-v-1)! (x+1)^{-v-k-1} (x-1)^k. \quad (61)$$

Теперь рассмотрим (44). Многочлены, содержащиеся в (44), соответствуют формуле Родрига

$$L1_{-v-1}^{-\mu}(x) = L2_{-v-1}^{\mu}(x) = (x+1)^{-\mu} (x-1)^{\mu} ((x+1)^{\mu-v-1} (x-1)^{-\mu-v-1})^{(-v-1)}. \quad (62)$$

Тогда

$$y_8(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}\mu} (x-1)^{-\frac{1}{2}\mu} L2_{-v-1}^{\mu}(x). \quad (63)$$

Поскольку (44) получено из (42) подстановкой (23), то подстановкой (23) в (62) получим, что частным решением (44) уравнения Лежандра при отрицательных целых v будет

$$y_8(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}\mu} (x-1)^{-\frac{1}{2}\mu} * \quad (64)$$

$$* \sum_{k=0}^{-v-1} \binom{-\mu-v-1}{-v-k-1} \binom{\mu-v-1}{k} (-v-1)! (x+1)^{-v-k-1} (x-1)^k.$$

Следовательно, общим решением уравнения Лежандра при отрицательных целых v будет линейная комбинация частных решений (61) и (64).

4.3. Частные решения уравнения Лежандра при неотрицательных целых $(\mu + v)$

Определение 3. Назовем многочлены, соответствующие формуле Родрига

$$L3_n^\mu(x) = (x^2 - 1)^\mu ((x^2 - 1)^{n-\mu})^{(n)}, \quad (65)$$

многочленами $L3(x)$ третьего рода уравнения Лагранжа.

Найдем свойства многочленов третьего рода. Поскольку они соответствуют формуле Родрига (65), то найдем из (65) значения первых многочленов:

$$L3_0^\mu(x) = 1, L5_1^\mu(x) = 2(1 - \mu)x. \quad (66)$$

Сравнив формулы Родрига (37) и (65), получим

$$h(x) = (x^2 - 1)^{-\mu}, \quad (67)$$

тогда

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{-2\mu x}{x^2 - 1}, \quad (68)$$

$$B(x) = x^2 - 1, A(x) = -2\mu x \Leftrightarrow p_0 = 0, p_1 = -2\mu, q_0 = -1, q_1 = 0, q_2 = 1. \quad (69)$$

Поскольку для (65) определены коэффициенты (69), найдем рекуррентные соотношения для многочленов первого рода по теореме 3 из [6]:

$$(n - 2\mu + 2)L3_{n+2}^\mu(x) - 2(2n + 3 - 2\mu)(n - \mu + 2)xL3_{n+1}^\mu(x) + 4(n + 1)(n - \mu + 1)(n - \mu + 2)L3_n^\mu(x) = 0. \quad (70)$$

Пусть

$$f(x) = (x + 1)^{n-\mu}, g(x) = (x - 1)^{n-\mu}, \quad (71)$$

тогда по формуле Лейбница дифференцирования произведения получим

$$((x^2 - 1)^{n-\mu})^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n-\mu}{k} \binom{n-\mu}{n-k} n! (x+1)^{n-\mu-k} (x-1)^{k-\mu}. \quad (72)$$

Тогда из (65) и (72) получим

$$L3_n^\mu(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n-\mu}{k} \binom{n-\mu}{n-k} n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k. \quad (73)$$

Поскольку из (21), (65) следует, что

$$y_1(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}} L3_{\mu+v}^\mu(x), \quad (74)$$

то частным решением уравнения Лежандра при неотрицательных целых $(\mu + v)$ будет

$$y_1(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{\mu+v} \binom{v}{k} \binom{v}{\mu+v-k} (\mu+v)! (x+1)^{\mu+v-k} (x-1)^k. \quad (75)$$

4.4. Частные решения уравнения Лежандра при неотрицательных целых $(v-\mu)$

Определение 4. Назовем многочлены, соответствующие формуле Родрига

$$L4_n^\mu(x) = (x^2 - 1)^{-\mu} ((x^2 - 1)^{n+\mu})^{(n)}, \quad (76)$$

многочленами $L4(x)$ четвертого рода уравнения Лагранжа.

Очевидно, что (76) получена из (65) подстановкой (23), следовательно

$$L4_n^\mu(x) = L3_n^{-\mu}(x). \quad (77)$$

Поскольку (24) получено из (21) также подстановкой (23), то многочлены четвертого рода входят в частное решение (24). Найдем свойства многочленов четвертого рода путем подстановки (23) в свойства многочленов пятого рода (66), (70), (73). Получим

$$L4_0^\mu(x) = 1, L4_1^\mu(x) = 2(1 + \mu)x, \quad (78)$$

$$(n + 2\mu + 2)L4_{n+2}^\mu(x) - 2(2n + 3 + 2\mu)(n + \mu + 2)xL4_{n+1}^\mu(x) + 4(n + 1)(n + \mu + 1)(n + \mu + 2)L4_n^\mu(x) = 0, \quad (79)$$

$$L4_n^\mu(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\mu}{k} \binom{n+\mu}{n-k} n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k. \quad (80)$$

Из (24), (76) следует, что

$$y_3(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} L4_{v-\mu}^\mu(x). \quad (81)$$

Подстановкой (23) в (75) получим, что частным решением (24) уравнения Лежандра при неотрицательных целых $(v - \mu)$ будет

$$y_3(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{v-\mu} \binom{v}{k} \binom{v}{v-\mu-k} (v-\mu)! (x+1)^{v-\mu-k} (x-1)^k. \quad (82)$$

4.5. Частные решения уравнения Лежандра при отрицательных целых $(\mu + v)$

Из (25), (76) получим

$$y_4(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} L_{-\mu-v-1}^{\mu}(x). \quad (83)$$

Поскольку (25) получается из (24) подстановкой (3), то подстановкой (3) в (82) получим, что частным решением уравнения Лежандра при отрицательных целых $(v+\mu)$ будет

$$y_4(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} * \sum_{k=0}^{-\mu-v-1} \binom{-v-1}{k} \binom{-v-1}{-\mu-v-k-1} (-\mu-v-1)! (x+1)^{-\mu-v-k-1} (x-1)^k. \quad (84)$$

4.6. Частные решения уравнения Лежандра при отрицательных целых $(v-\mu)$

Из (22), (65) получим

$$y_2(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}} L_{\mu-v-1}^{\mu}(x). \quad (85)$$

Поскольку (22) получается из (25) подстановкой (23), то подстановкой (23) в (84) получим, что частным решением уравнения Лежандра при отрицательных целых $(v-\mu)$ будет

$$y_2(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{\mu}{2}} * \sum_{k=0}^{\mu-v-1} \binom{-v-1}{k} \binom{-v-1}{\mu-v-k-1} (\mu-v-1)! (x+1)^{\mu-v-k-1} (x-1)^k. \quad (86)$$

5. Структура общего решения уравнения Лежандра при $\mu = 0$

Структура общего решения уравнения Лежандра при $\mu = 0$ имеет не восемь, а два частных решения, поскольку при $\mu = 0$ восемь решений разделяются на две четверки, которые совпадают. Получим эту структуры из (45) подстановкой $\mu = 0$.

$$y(x) = C_1((x^2 - 1)^v)^{(v)} + C_2((x^2 - 1)^{-v-1})^{(-v-1)}. \quad (87)$$

Следовательно, структура общего решения уравнения Лежандра при $\mu = 0$ именно такая, как указано в теории. Но следует учитывать, что хотя подстановка (3) в общее решение уравнения Лежандра при $\mu = 0$ переводит его в себя, она не переводит в себя его частные решения, а переводит их друг в друга.

6. Особый случай: решение уравнения Лежандра при $\mu = \pm \frac{1}{2}$

Подстановкой

$$y(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} t(x), \quad (88)$$

получаем из уравнения (1) уравнение

$$(4x^4 - 8x^2 + 4)t''(x) + (4x^3 - 4x)t'(x) + (-4v^2x^2 - 4vx^2 - x^2 - 4\mu^2 + 4v^2 + 4v + 2)t(x) = 0. \quad (89)$$

Пусть

$$\mu = \pm \frac{1}{2}, \quad (90)$$

тогда подстановкой (90) в (89) получим

$$4(x^2 - 1)t''(x) + 4xt'(x) - (2v - 1)^2t(x) = 0. \quad (91)$$

Пусть

$$v = n - \frac{1}{2}, \quad (92)$$

тогда получим уравнение Чебышева, см. [20, с. 65]

$$(1 - x^2)t''(x) - xt'(x) + n^2t(x) = 0, \quad (93)$$

которое имеет решение, см. [13, с. 171, № 146], [14, с. 411-412, № 2.235]

$$\begin{aligned} t(x) &= C_1 \cos(\arccos(x)) + C_2 \sin(\arccos(x)); |x| < 0, \\ t(x) &= C_1 \exp(\operatorname{arccch}(|x|)) + C_2 \exp(-\operatorname{arccch}(|x|)); |x| > 0. \end{aligned} \quad (94)$$

Следовательно, получаем, что уравнение Лежандра при $\mu = \pm \frac{1}{2}$ имеет решение

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} \cos\left((v + \frac{1}{2})\arccos(x)\right) + \\ &+ C_2 (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} \sin\left((v + \frac{1}{2})\arccos(x)\right); |x| < 0, \\ y(x) &= C_1 (x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} \exp\left((v + \frac{1}{2})\operatorname{arccch}(|x|)\right) + \\ &+ C_2 (x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} \exp\left((-v - \frac{1}{2})\operatorname{arccch}(|x|)\right); |x| > 0. \end{aligned} \quad (95)$$

7. Вывод

Используя структуру общего решения, применяемую в этой работе, можно найти общее решение уравнения Лежандра при целых v , а также частные решения при целых $v + \mu$ и целых $v - \mu$.

Также можно найти общее решение уравнения Лежандра при $\mu = \pm \frac{1}{2}$, приведя уравнение Лежандра к уравнению Чебышева.

Список литературы

- [1] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. – 294 с.
- [2] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1979. – 416 с.

- [3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [4] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Госиздат физико–математической литературы, 1963. – 358 с.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Главред физико–математической литературы изд-ва «Наука», 1977. – 736 с.
- [6] Зайков С.Ю. Структура общего решения уравнения Эрмита и решение при отрицательных целых n . https://archive.org/details/20260122_20260122_1442
- [7] Зайков С.Ю. Структура общего решения уравнений Лагерра и Уиттекера, и решение при отрицательных целых n . https://archive.org/details/20260122_20260122_1601
- [8] Зайков С.Ю. Структура общего решения уравнений для многочленов Якоби и Гегенбауэра, и решение при отрицательных целых n . https://archive.org/details/20260216_20260216_0105
- [9] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. – 344 с.
- [10] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. – 832 с.
- [11] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Госиздат физико–математической литературы, 1962. – 500 с.
- [12] Oldham K.B., Myland J., Spanier J. An atlas of functions. New York, Springer Science+Business Media, LLC, 2009. 748p.
- [13] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИФ «Физ–мат. лит.», 2001. – 576 с.
- [14] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гл. ред. физ–мат. лит., 1971. – 576 с.
- [15] Földvary L. Sine series expansion of associated Legendre functions. Acta Geod Geophys, vol. 50 (2015), p. 243–259.
- [16] Dattoli G., Germano B., Martinelli M.R., Ricci P.E. A novel theory of Legendre polynomials. Mathematical and Computer Modelling, vol. 54 (2011), p. 80–87.
- [17] Araci S., Acikgoz M., Bagdasaryan A., sen E. The Legendre Polynomials Associated with Bernoulli, Euler, Hermite and Bernstein Polynomials. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2013, vol. 1(1), p. 1–3.
- [18] Abu Hammad M., Khalil R. Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials. International Journal of Applied Mathematical Research, vol. 3 (3), 2014, p. 214–219.
- [19] Kim D.S., Rim S.H., Kim T. Some identities on Bernoulli and Euler polynomials arising from orthogonality of Legendre polynomials. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 227.
- [20] Зверев В.А., Точилина Т.В. Специальные разделы прикладной математики для оптотехников. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. – 235с.

Structure of the General Solution for Legendre's Equations, Fractional Derivatives, and Polynomials

ZaikovS.Yu.

Municipal autonomous institution of additional education "Sports School of Winter Sports of the
City of Tomsk"

zaykov_tomsk@mail.ru

Abstract. The Legendre differential equation is considered, along with the structure of its general solution for $\mu \neq 0$, the polynomials contained therein, and fractional derivatives. The structure of the general solution is considered to be a linear combination of eight particular solutions containing

fractional derivatives. Solutions to these equations have been found for cases where the orders of the aforementioned fractional derivatives are non-negative integers.

Keywords: linear differential equations, Rodrigues' formula, lacunae in reference works, recurrence relations, fractional derivatives, Legendre's equation, associated Legendre functions.